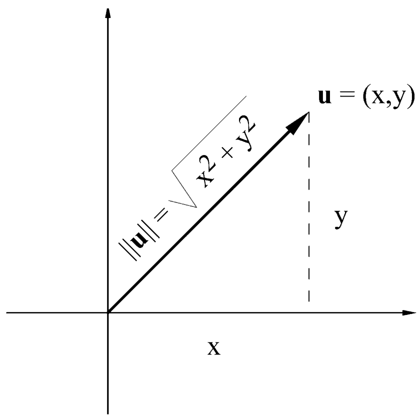
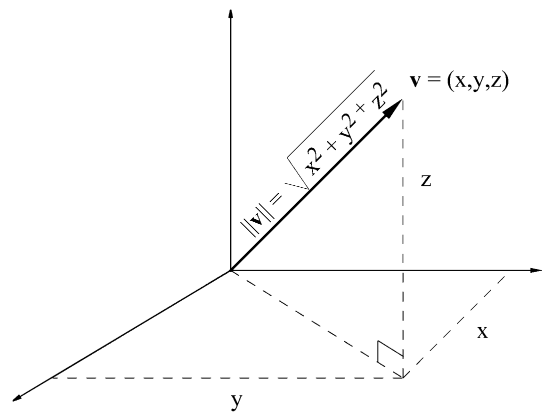
Norma, unutrašnji proizvod i ortogonalnost

8. Norma vektora

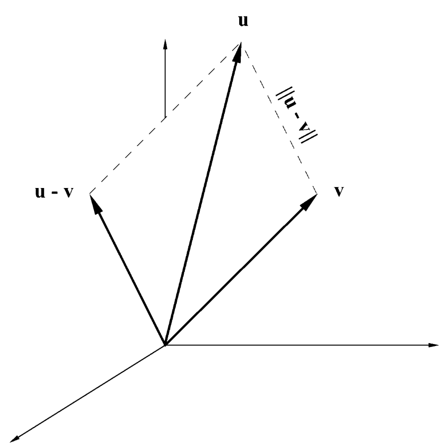




(8.01) Euklidova vektorska norma
Za vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ (ili iz $\mathbb{C}^n$) ($\mathbb{R}^n$ tumačimo kao prostor kolona-matrica oblika $n \times 1$), *euklidova norma* od $\boldsymbol{x}$ je definisana sa

- $\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}}$ kadgod je $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,
- $\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x}}$ kadgod je $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$.

◇



(8.02) Standardni unutrašnji proizvod
Skalarni proizvod definisan sa

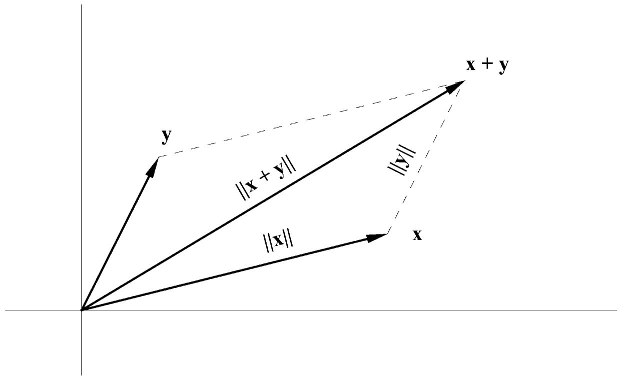
$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \in \mathbb{C}$$

se zove *standardni unutrašnji proizvod* za $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$, redom. ◇

(8.03) Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz (CBS) nejednakost

$$|\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \quad \text{za sve } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$ za $\alpha = \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y} / \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x}$. ◇



(8.04) Nejednakost trougla

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \quad \text{za svaki } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n.$$

◇

(8.05) p-norme

Za $p \geq 1$, *p-norma* vektora $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ je definisana sa $\|\boldsymbol{x}\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$. ◇

(8.06) Opšta vektorska norma

Norma za realni ili kompleksni vektorski prostor $\mathcal{V}$ je funkcija $\| \star \|$ koja preslikava $\mathcal{V}$ u $\mathbb{R}$ i zadovoljava sljedeće uslove:

$$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0 \quad \text{i} \quad \|\boldsymbol{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

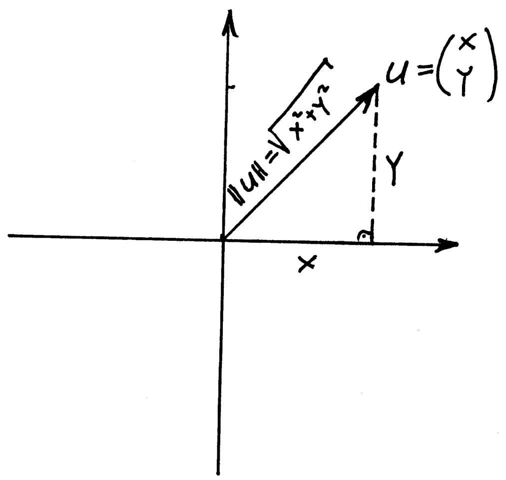
$$\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\| \text{ za sve skalare } \alpha,$$

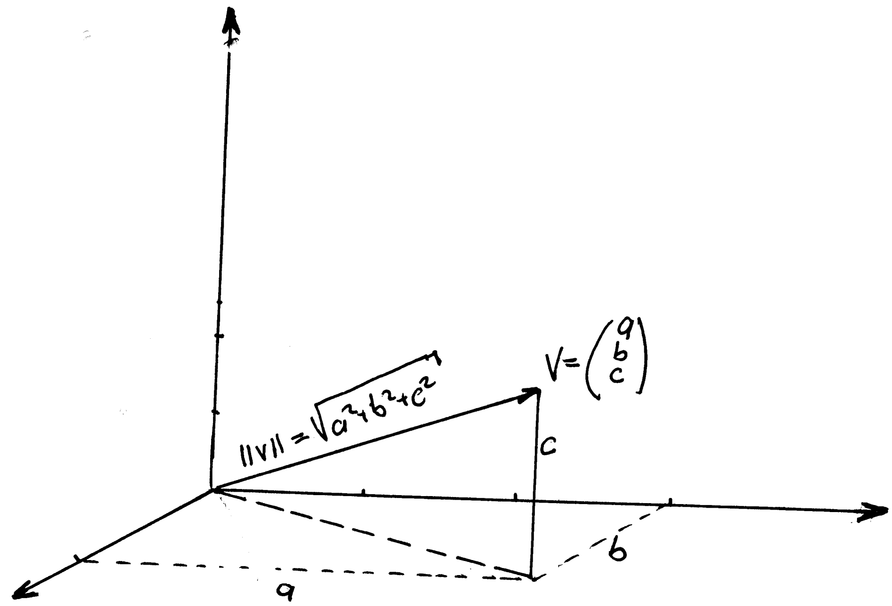
$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.$$

◇

(#) Posmatrajmo vektorske prostore $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$. Iskoristiti Pitagorinu teoremu i izračunati dužine $\|u\|$ i $\|v\|$ vektora $u \in \mathbb{R}^2$ i $v \in \mathbb{R}^3$, te geometrijski prikazati dužine ovih vektora.

Rj.





$\|u\|=\sqrt{x^2+y^2}$, $u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\|v\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

ove dužine vektora zovemo euklidova norma u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^2$

Euklidova norma vektora

Euklidova norma vektora x je definisana sa

(i) $\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^T x}$ kadgod je $x \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^* x}$ kadgod je $x \in \mathbb{C}^n$.

Pokazati da euklidova norma zadovoljava sljedeće osobine:

(a) $\|x\| \geq 0$ i $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$,

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ za svaki skalar α

(c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Rj.

a)

Izaberimo proizvoljno $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\underbrace{\underbrace{x_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{x_2^2}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{x_n^2}_{\geq 0}}_{\geq 0}} \geq 0$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}.$$

b)

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2 + \ldots + (\alpha x_n)^2} = \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)} =$$

$$= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \text{za } \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

c)

Dio pod (c) ćemo kasnije uraditi kao poseban zadatak.

(#) Koši-Bunjakovski-Švarcova (CBS) nejednakost.

Pokazati da $|x^T y| \leq \|x\| \, \|y\|$ za $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Jednakost vrijedi akko $y = \alpha x$ za $\alpha = \dfrac{x^T y}{x^T x}$.

Rj. Neka je $\alpha = \dfrac{\overbrace{x^T y}^{\in \mathbb{R}}}{\underbrace{x^T x}_{\in \mathbb{R}}} = \dfrac{x^T y}{\|x\|^2}$ (pretpostavimo da je $x \neq 0$

zato što nemamo šta dokazati ako je $x = 0$) i

primjetimo da je $x^T(\alpha x - y) = \alpha x^T x - x^T y = \dfrac{x^T y}{\|x\|^2} \|x\|^2 - x^T y = 0$

tj. $x^T(\alpha x - y) = 0$. ... (*)

Sad primjetimo

$$0 \leq \|\alpha x - y\|^2 = (\alpha x - y)^T(\alpha x - y) = (\alpha x^T - y^T)(\alpha x - y) =$$

$$= \alpha \underbrace{x^T(\alpha x - y)}_{\overset{(*)}{=} 0} - y^T(\alpha x - y) = -y^T(\alpha x - y) =$$

$$= y^T y - \alpha y^T x = \|y\|^2 - \frac{x^T y}{\|x\|^2} \cdot \underbrace{y^T x}_{= x^T y} = \frac{\|x\|^2 \|y\|^2 - |x^T y|^2}{\|x\|^2}.$$

Sad $0 < \|x\|^2$ povlači $\|x\|^2 \|y\|^2 - |x^T y|^2 \geq 0 \implies$

$$|x^T y|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

q.e.d.

Dokaz za jednakost ostavljamo kao zanimljivu vježbu.

Izračunati 1-, 2- i ∞-norme vektora $x=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\\-2\end{pmatrix}$ i $y=\begin{pmatrix}1+i\\1-i\\1\\4i\end{pmatrix}$.

Rj.

$$\|x\|_p \stackrel{def}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

Za $x=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\\-2\end{pmatrix}$ imamo

$$\|x\|_2 = \left(4+1+16+4\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\|x\|_1 = 2+1+4+2 = 9$$

$$\|x\|_\infty = \max\{2,1,4,2\} = 4$$

Za $y=\begin{pmatrix}1+i\\1-i\\1\\4i\end{pmatrix}$ imamo

$$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$|4i| = \sqrt{16+0} = 4$$

$$\|y\|_2 = \left(2+2+1+16\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{21}$$

$$\|y\|_1 = \sqrt{2}+\sqrt{2}+1+4 = 2\sqrt{2}+5$$

$$\|y\|_\infty = \max\{\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1, 4\} = 4$$

Primjetimo da je

$$\|x\|_\infty < \|x\|_2 < \|x\|_1$$

$$\|y\|_\infty < \|y\|_2 < \|y\|_1$$

(#) Posmatrajmo euklidovu normu vektora $u=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\\-2\end{pmatrix}$ i $v=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

a) Izračunati udaljenost između u i v.

b) Provjeriti da li vrijedi nejednakost trougla za u i v.

c) Provjeriti da li vrijedi CBS nejednakost za u i v.

Rj. Euklidova norma vektora $x \in \mathbb{R}^n$ je definisana sa $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

a) Udaljenost između u i v je definisano sa $\|u-v\|_2$.

$$u-v=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-5\\-1\end{pmatrix}$$

$$\|u-v\|_2=(1+4+25+1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{31}$$

b) $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2+\|y\|_2$ nejednakost trougla $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$$u+v=\begin{pmatrix}3\\0\\-3\\-3\end{pmatrix}$$

$$\|u+v\|_2=(9+0+9+9)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

$$\|u\|_2=(4+1+16+4)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5$$

$$\|v\|_2=(1+1+1+1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$$

$$3\sqrt{3}=\|u+v\|_2 < \|u\|_2+\|v\|_2=5+2$$ vrijedi nejednakost trougla

c) CBS nejednakost za $x,y\in\mathbb{R}^n$ je $|x^Ty| \leq \|x\|_2\,\|y\|_2$

$$u^Tv=\begin{bmatrix}2 & 1 & -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}=2-1-4+2=-1$$

$$|u^Tv|=1$$

$$1=|u^Tv|<\|u\|\,\|v\|=2\cdot 5=10$$ vrijedi CBS nejednakost

(#) Pokazati da $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)^2 \leq n(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2)$ za $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

R: Posmatrajmo vektore u i $v \in \mathbb{R}^n$

$$u=(1,1,\ldots,1)$$

$$v=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$$

$$\|u\|_2=\left(\sum_{j=1}^{n} u_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+1+\ldots+1}=\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}}$$

$$\|v\|_2=\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$u\cdot v=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$$

Prema CBS nejednakosti imamo

$$|u^* v| \leq \|u\|_2 \|v\|_2 \quad \forall u,v \in \mathbb{C}^n$$

U našem slučaju

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n \leq n^{\frac{1}{2}}\cdot(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2)^{\frac{1}{2}} \quad /^2$$

$$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)^2 \leq n(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2)$$

a) Koristeći euklidovu normu opisati kuglu u $\mathbb{R}^n$ sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnika 1.

b) Opisati kuglu sa centrom u tački $c=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ i poluprečnikom ρ.

Rj:

a) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-c\|_2 \leq \rho\}$

Geometrijski predstaviti sljedeće skupove

i) $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$

ii)$^\vee$ $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\}$

iii)$^\vee$ $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$

iv) $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 \leq 5\}$

v) $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-3\|_2 \leq 4\}$

Rj:

i) $x=(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2+x_2^2} = 1$

$\|x\|_2^2 = 1$

$x_1^2 + x_2^2 = 1$

krug sa centrom u koordinatnom početku poluprečnikom 1

iv) $x=(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \leq 5$

$\|x\|_2^2 = 25$

$x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leq 25$

kugla sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika 5.

v) $\|x-3\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} x_1-3 \\ x_2-3 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{(x_1-3)^2+(x_2-3)^2} \leq 4$

$\|x-3\|_2^2 \leq 16 \Rightarrow (x_1-3)^2+(x_2-3)^2 \leq 16$ krug i unutrašnjost kruga sa centrom u (3,3) poluprečnika 4

(#) Ako je $x, y \in \mathbb{R}^n$ tako da $\|x-y\|_2 = \|x+y\|_2$, šta je $x^T y$?

Rj.:

$$\|x-y\|_2 = \|x+y\|_2 \quad /^2$$

$$\|x-y\|_2^2 = \|x+y\|_2^2$$

$$(x-y)^T(x-y) = (x+y)^T(x+y)$$

$$(x^T-y^T)(x-y) = (x^T+y^T)(x+y)$$

$$x^Tx - x^Ty - y^Tx - y^Ty = x^Tx + x^Ty + y^Tx + y^Ty$$

$$\|x\|_2^2 - x^Ty - x^Ty - \|y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + x^Ty + x^Ty + \|y\|_2^2$$

$$-2x^Ty = 2x^Ty$$

$$4x^Ty = 0$$

$$x^Ty = 0$$

(#) Objasniti zašto je $\|x-y\| = \|y-x\|$ tačno (istinito) za sve norme.

Rj.

$$\|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\,\|y-x\| = \|y-x\|$$

Ovdje smo iskoristili drugu osobinu vektorske norme koja glasi

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\| \quad \forall \text{ skalar } \alpha.$$

Preostale dvije osobine vektorske norme su

$$\|x\| \geq 0 \quad ; \quad \|x\| = 0 \iff x = 0,$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

(#) Nejednakost trougla.

Pokazati da je $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ za $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Rj: Posmatrajmo $x, y \in \mathbb{R}^n$ kao kolona vektore.

$$\|x+y\|^2 = (x+y)^T (x+y) = (x^T+y^T)(x+y) =$$

$$= x^T x + x^T y + y^T x + y^T y = \|x\|^2 + x^T y + y^T x + \|y\|^2 \overset{(*)}{=}$$

Kako su $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ kolona vektori primjetimo da je $x^T y = y^T x$. i $y^T x = x^T y$

$$\overset{(*)}{=} \|x\|^2 + 2x^T y + \|y\|^2 \overset{(**)}{\leq}$$

Prema CBS nejednakosti $|x^T y| \leq \|x\| \|y\|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\overset{(**)}{\leq} \|x\|^2 + 2|x^T y| + \|y\|^2 \overset{CBS}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Prema tome

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

norma vektora je uvijek nenegativna

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

q.e.d.

(#) Nejednakost trougla sa druge strane.

Pokazati da je $\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x-y\|$ za $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Rj.

Ovaj zadatak je u stvari posljedica nejednakosti trougla.

$$\|x\| = \|x-y+y\| \overset{\text{nejedn. troug.}}{\leq} \|x-y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

i

$$\|y\| = \|x-y-x\| \overset{\text{nejedn. trougla}}{\leq} \|x-y\| + \|x\| \implies -(\|x\| - \|y\|) \leq \|x-y\|$$

Zašto?

$$\|y\| = 1 \cdot \|y\| = |-1| \, \|y\| = \|-y\|$$

Prema tome $\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x-y\|$

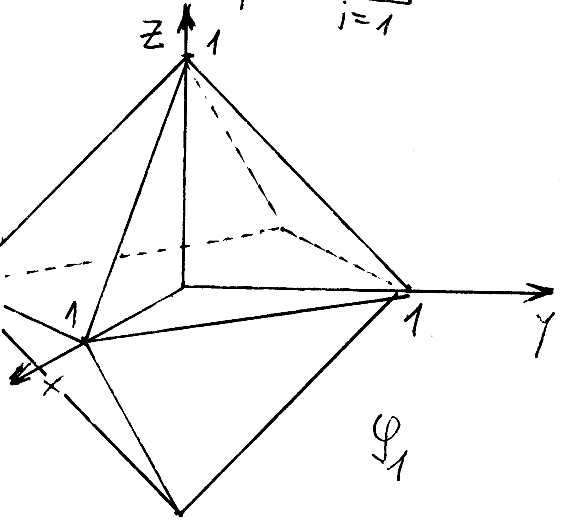
q.e.d.

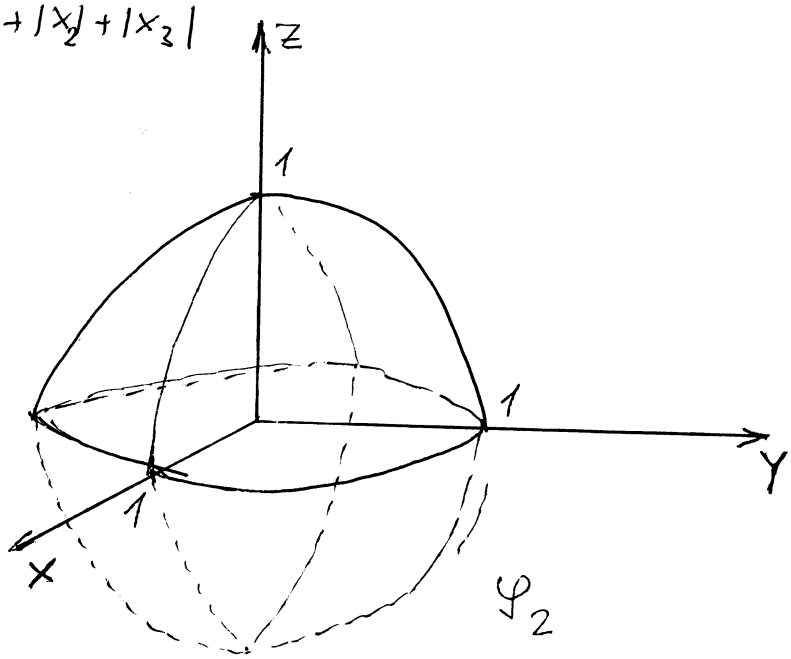
Posmatrajmo vektorski prostor $\mathbb{R}^3$. U ovom prostoru grafički prikazati jedinične p-sfere $\mathcal{S}_p = \{x \mid \|x\|_p = 1\}$ za $p = 1, 2, \infty$.

R:

$\mathcal{S}_1 = \{x \mid \|x\|_1 = 1\}$

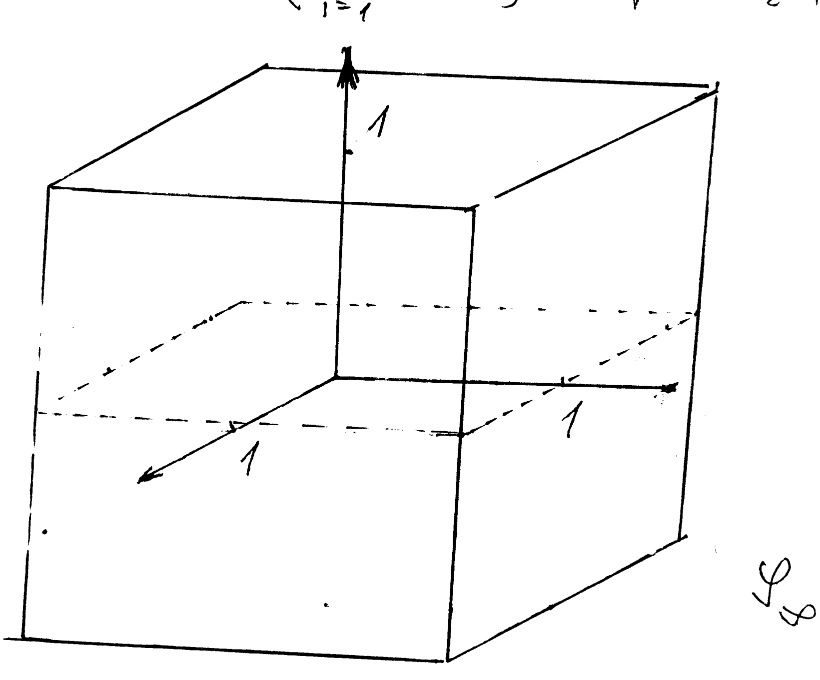
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |x_i| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$$





$\mathcal{S}_2 = \{x \mid \|x\|_2 = 1\}$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{3} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$



$\mathcal{S}_\infty = \{x \mid \|x\|_\infty = 1\}$

$$\|x\| = \max_{1 \le i \le 3} |x_i|$$

Primjetimo da se $\mathcal{S}_1$ nalazi unutar $\mathcal{S}_2$, a $\mathcal{S}_2$ se nalazi unutar $\mathcal{S}_\infty$.

Zadaci za vežbu

1. Za $x \in \mathbb{R}^n$ objasniti zašto $\|x\|_1 \geq \|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$

2. Za nenula vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$ sa euklidovom normom, dokazati da u nejednakosti trougla jednakost vrijedi ako i samo ako $y = \alpha x$, gdje je α realan i pozitivan.

3. Iskoristiti Hölderovu nejednakost (Hölderova nejednakost je $|x^* y| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ ako je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) da bi dokazali sljedeću tvrdnju: Ako je suma komponenata vektora $x \in \mathbb{R}^n$ jednak nuli (tj. $x^T e = 0$ za $e^T = (1, 1, \dots, 1)$ tada

$$|x^T y| \leq \|x\|_1 \left(\frac{y_{max} - y_{min}}{2} \right) \quad \text{za sve } y \in \mathbb{R}^n.$$

4. Klasični oblik Hölderove nejednakosti tvrdi da ako su $p > 1$ i $q > 1$ realni brojevi takvi da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ tada

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Izvesti ovu nejednakost prateći sljedeće korake:

(a) Posmatrajući f-ju $f(x) = (1-\lambda) + \lambda x + x^\lambda$ za $0 < \lambda < 1$ izvesti nejednakost

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \alpha + (1-\lambda) \beta$$

za nenegativne realne brojeve α i β.

b) Neka je $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|_p}$ i $\hat{y} = \frac{y}{\|y\|_q}$. Primjeniti nejednakost iz djela (a) i izvesti

$$\sum_{i=1}^{n} |\hat{x}_i \hat{y}_i| \le \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} |\hat{x}_i|^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} |\hat{y}_i|^q = 1.$$

c) Izvesti klasični oblik Hölderove nejednakosti, pa onda objasniti zašto ovo znači da $|x^* y| \le \|x\|_p \|y\|_q$.

5. Nejednakost trougla za opštu p-normu je

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

je poznata pod imenom nejednakost Minkovskog, koja u stvari tvrdi da za $p \ge 1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Izvesti nejednakost Minkovskog.

Uputa: Za $p > 1$, neka je q broj takav da $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Provjeriti da za skalare α i β vrijedi

$$|\alpha+\beta|^p = |\alpha+\beta|\,|\alpha+\beta|^{\frac{p}{q}} \le |\alpha|\,|\alpha+\beta|^{\frac{p}{q}} + |\beta|\,|\alpha+\beta|^{\frac{p}{q}},$$

i onda iskoristiti Hölderovu nejednakost iz prethodnog zadatka.